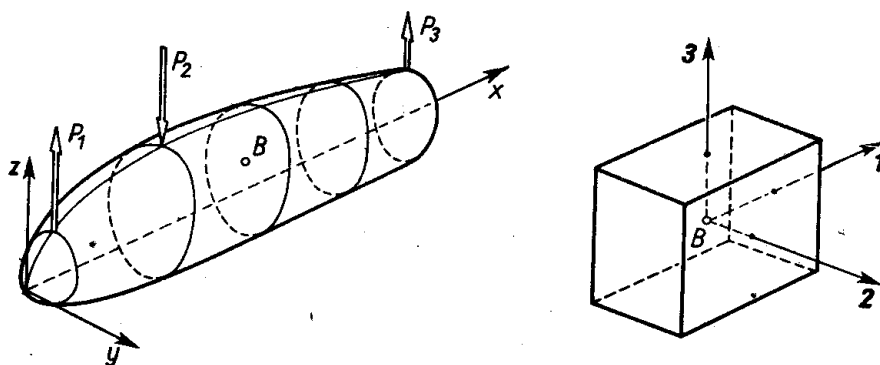


Bezpieczeństwo konstrukcji

7 ANALIZA STANU NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA

W bardziej złożonych przypadkach obciążenia pręta ocena jego bezpieczeństwa wymaga głębszego, niż podane w art. 2.5 i 3.1, poznania właściwości stanu naprężenia i stanu odkształcenia w danym punkcie ciała. Pojęcia te, jak wiemy z art. 1.5 i 1.6, reprezentują całą mnogość wartości naprężeń (bądź odkształceń) odpowiadającą wszystkim możliwym przekrojom (bądź kierunkom) przeprowadzonym przez ten punkt. W artykule 2.5 na przykładzie rozciągania pokazano, że istnieją zależności, które tę całą mnogość porządkują. Naszym obecnym zadaniem jest sformułowanie podobnych zależności w bardziej ogólnych przypadkach. Dla ujednolicenia postępowania w kwestii i naprężeń, i odkształceń wprowadzamy jako obiekt badania elementarną prostokątną kostkę wyciętą myślowo z ciała w otoczeniu badanego punktu B (rys. 7.1). Na ścianach tej kostki istnieją naprężenia



Rys. 7.1. Elementarna kostka — podstawowy obiekt analizy

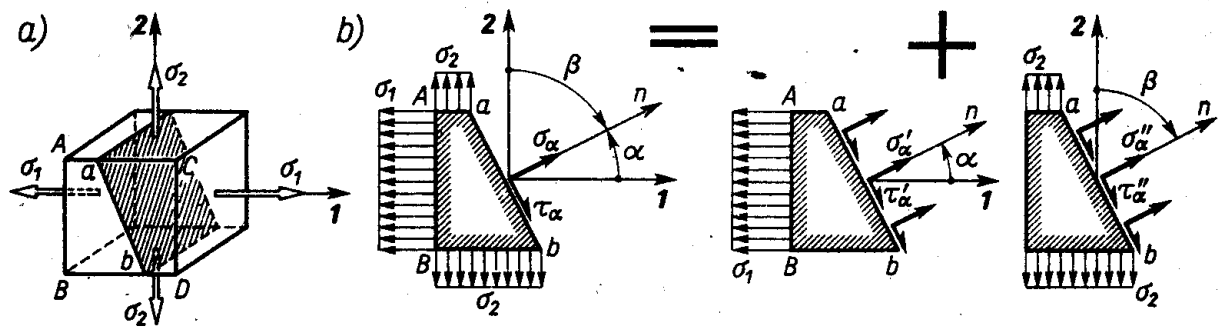
pochodzące z oddziaływania na nią całej reszty ciała. Z uwagi przy tym na bardzo małe jej wymiary możemy uważać, że naprężenia te rozłożone są równomiernie.

Poszukiwanie zależności porządkujących wartości naprężeń i odkształceń nosi nazwę *analizy stanu naprężenia i odkształcenia*. Jej zakres dobrano tu jako minimum niezbędne

w nauce wytrzymałości materiałów. Bardziej szczegółowe informacje oraz niektóre dowody są przedmiotem teorii sprężystości.

7.1. Analiza płaskiego stanu naprężenia

Jako pierwsze zagadnienie analizy naprężeń rozpatrzmy przypadek, gdy na prostopadłe do osi **1** i **2** ściany kostki działają naprężenia σ_1 i σ_2 , a ściany równoległe do płaszczyzny **1,2** są nieobciążone (rys. 7.2a). Taki stan naprężeń nazywamy *płaskim* lub dwuwymiarowym. Zakładamy na razie, że ukośny przekrój ab jest prostopadły do nieobciążonej ściany $ABCD$. Ustawienie tego przekroju, określa⁽¹⁾ kąt α bądź kąt $\beta = \alpha - (\pi/2)$.



Rys. 7.2. Analiza płaskiego (dwuwymiarowego) stanu naprężenia

Składowe naprężenia σ_α i τ_α wyznaczmy stosując zasadę superpozycji, w rezultacie czego mamy dwa stany. Pierwszy z nich przedstawia rozciąganie w kierunku osi **1**, drugi — rozciąganie w kierunku osi **2**. Odpowiadające tym składowym stanom naprężenia σ'_α , τ'_α , σ''_α i τ''_α określamy z wzorów (2.13) i (2.14)

$$\begin{aligned}\sigma'_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha, & \tau'_\alpha &= \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \sigma''_\alpha &= \sigma_2 \cos^2 \beta = \sigma_2 \sin^2 \alpha, & \tau''_\alpha &= \sigma_2 \sin \beta \cos \beta = -\sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha.\end{aligned}$$

Po złożeniu wyników mamy ostatecznie poszukiwane zależności

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \quad (7.1)$$

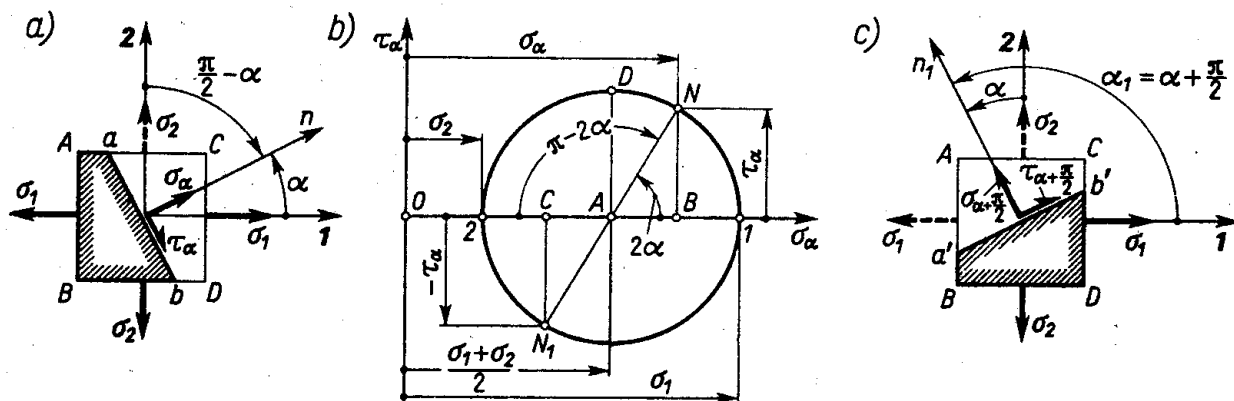
$$\tau_\alpha = \tau'_\alpha + \tau''_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (7.2)$$

Widać, że poprzednie zależności (2.13) i (2.14) są szczególnym przypadkiem wzorów (7.1) i (7.2), gdy $\sigma_1 = \sigma$ i $\sigma_2 = 0$. Podobnie widać, że σ_α oscyluje między granicznymi wartościami σ_1 ($\alpha = 0$, $\alpha = \pi$) i σ_2 ($\alpha = \pi/2$, $\alpha = 3\pi/2$), podczas gdy τ_α zmienia się w przedziale $\pm(\sigma_1 - \sigma_2)/2$. Obowiązuje przy tym ta sama co w art. 2.5 umowa o znakach σ_α i τ_α , jak również te same uwagi o prowadzeniu w rozpatrywanej kostce przekrojów wielokrotnych (rys. 2.15). W szczególności stwierdzamy, że w dwóch prostopadłych przekrojach, okre-

⁽¹⁾ Identycznie jak w art. 2.5, kąt między daną osią a zewnętrzną normalną n jest dodatni, gdy obrót od tej osi do osi n jest przeciwwzegladowy. Tak więc na rys. 7.2 mamy $\alpha > 0$, $\beta < 0$.

ślonych odpowiednio kątami α i $\alpha + (\pi/2)$ naprężenia τ_α i $\tau_{\alpha+(\pi/2)}$ mają zawsze równe wartości bezwzględne (zasada symetrii naprężeń stycznych). Jeśli naprężenia σ_1 lub σ_2 są ściskające, to, zgodnie z umową, należy we wzorach (7.1) i (7.2) wstawić ich wartości ze znakiem minus.

Wynik analizy, tj. wzory (7.1) i (7.2), można przedstawić wykreslnie w postaci tzw. *koła Mohra*. Biorąc mianowicie układ współrzędnych σ_α i τ_α (rys. 7.3b) zbudujemy koło o środku A leżącym na osi odciętych w ten sposób, aby odcięte $\overline{OI} = \sigma_1$, $\overline{O2} = \sigma_2$. Kreśląc następnie promień AN pod kątem 2α , tj. równym podwojonemu kątowi α na obrazie kostki⁽¹⁾



Rys. 7.3. Koło Mohra dla płaskiego stanu naprężenia

(rys. 7.3a), otrzymujemy punkt N . Jego współrzędne \overline{OB} i \overline{BN} dają w obranej skali algebraiczne wartości σ_α i τ_α , albowiem

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OA} + \overline{AN} \cos 2\alpha, \quad \overline{BN} = \overline{AN} \sin 2\alpha,$$

a ponieważ $\overline{OA} = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, $\overline{AN} = \overline{AI} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$, zatem

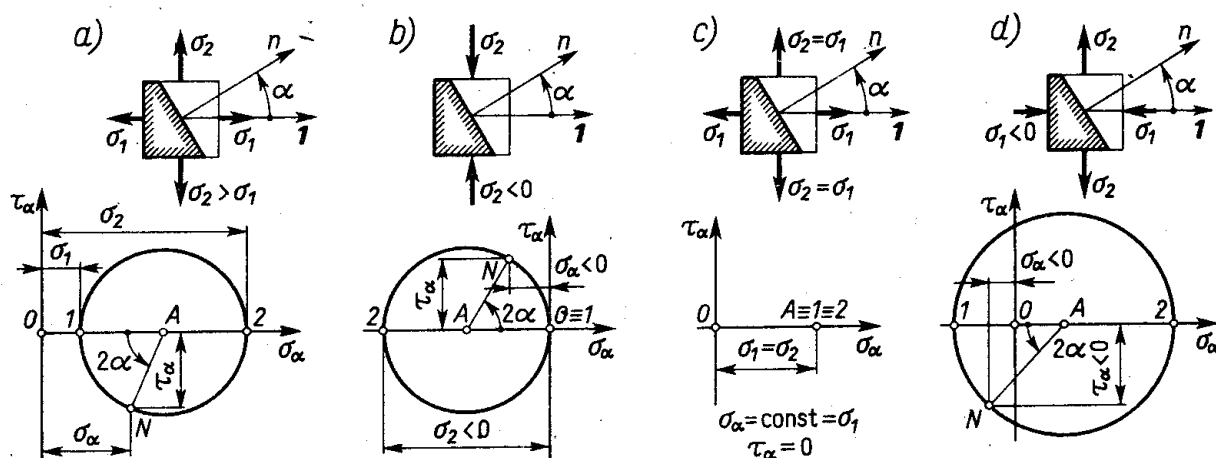
$$\overline{OB} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \quad \overline{BN} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha,$$

czyli zależności identyczne z wzorami (7.1) i (7.2). Jeśli teraz na obrazie kostki (rys. 7.3a) zmieniamy kąt α , a więc i ustawienie przekroju ab , to punkt N wędruje po kole Mohra w dwukrotnie szybszym tempie. I tak, rozpoczynając od punktu I , gdy $2\alpha \stackrel{!}{=} 0$, $\sigma_\alpha = \sigma_1$, $\tau_\alpha = 0$, przechodzimy stopniowo do punktu D , w którym $2\alpha = \pi/2$, $\sigma_\alpha = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, a wartość $\tau_\alpha = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ jest maksymalna i odpowiada przekrojowi ab określonego przez $\alpha = \pi/4$. Powiększając dalej kąt 2α dochodzimy do punktu 2 ($\sigma_\alpha = \sigma_2$, $\tau_\alpha = 0$), a odpowiadający przekrój ab jest prostopadły do osi 2 ($\alpha = \pi/2$). Podobnie prześledzimy wędrowkę punktu N po dolnym łuku koła Mohra, czemu na obrazie kostki odpowiada kąt $\alpha_1 > (\pi/2)$ (rys. 7.3c). Jeśli w kostce mamy dwa przekroje prostopadłe do siebie, określone kątami α i $\alpha_1 = \alpha + (\pi/2)$, to odpowiadające im punkty N i N_1 koła Mohra leżą na jednej średnicy, skąd wynika

$$\tau_{\alpha+\pi/2} = -\tau_\alpha. \quad (a)$$

⁽¹⁾ Kąt 2α między punktami okręgu należy odmierzyć z tym samym zwrotem względem środka koła co kąt α na obrazie kostki.

Powyższa dyskusja odpowiada sytuacji, gdy $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$. Jeśli jedno z naprężeń jest ściskające, a więc ujemne, to jego wartość należy odłożyć na lewo od punktu O . Kilka wariantów stanu naprężenia i odpowiednich kół Mohra podaje⁽¹⁾ rys. 7.4.



Rys. 7.4. Przykłady stanów naprężenia i odpowiednich kół Mohra

a) dwuwymiarowe rozciąganie, $\sigma_1 < \sigma_2$; b) proste ściskanie, $\sigma_1 = 0, \sigma_2 < 0$; c) dwuwymiarowe równomierne rozciąganie $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$; d) przypadek $\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0$

Z koła Mohra odczytujemy bezpośrednio widoczne właściwości płaskiego stanu naprężenia, a mianowicie;

a. Istnieją tylko dwa przekroje (ściślej dwie rodziny przekrojów), w których panują tylko naprężenia normalne $\sigma_\alpha = \sigma_1, \sigma_\alpha = \sigma_2$, a $\tau_\alpha = 0$. Przekroje te, tzw. *przekroje główne*, są względem siebie prostopadłe. Naprężenia normalne w tych przekrojach, tj. σ_1 i σ_2 , nazywają się *głównymi naprężeniami*.

b. Naprężenia główne są ekstremalnymi wartościami naprężenia σ_α i zawsze spełniona jest nierówność

$$\sigma_2 \leq \sigma_\alpha \leq \sigma_1, \quad \text{jeśli} \quad \sigma_1 > \sigma_2. \quad (7.3)$$

c. Ekstremalne naprężenia styczne występują w przekrojach dwusiecznych względem przekrojów głównych, tj. $\alpha = \pm(\pi/4)$. Ich bezwzględna wartość jest ta sama i wynosi

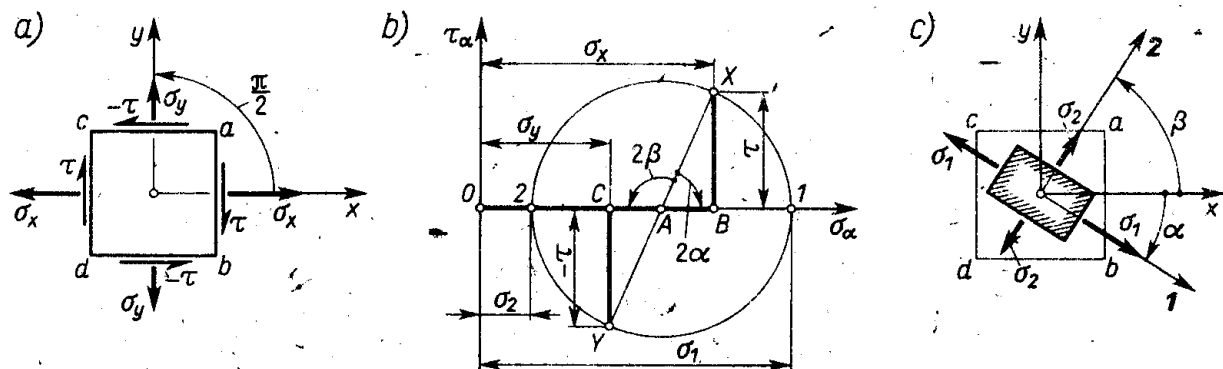
$$|\tau|_{\text{ekstr}} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|, \quad (7.4)$$

a więc równa się połowie algebraicznej różnicy naprężeń głównych.

W rozpatrzonych dotąd zagadnieniach stan naprężenia podany był przez naprężenia główne, a celem było wyznaczenie naprężeń w jedno- lub wielokrotnych przekrojach obroconych względem przekrojów głównych. Jak widać, choćby z rys. 7.2, wyniki takich zagadnień, zwanych *prostymi*, mają postać bardziej złożoną niż stadium wyjściowe. W praktyce spotykamy się częściej z zagadnieniami *odwrotnymi*, gdy w wyjściowym stadium na dwóch prostopadłych parach ścian kostki dane są naprężenia σ_x, σ_y i τ (rys. 7.5a). Te ostatnie, zgodnie z zasadą symetrii, są równe co do bezwzględnych wartości i są skier-

⁽¹⁾ Pożądane jest nabycie wprawy w korelowaniu przekroju na obrazie kostki z punktem na kole Mohra i rysowanie obrazu naprężeń na rysunku kostki otrzymanych z koła Mohra.

rowane bądź do wspólnych krawędzi, bądź od nich. Poszukiwanymi wielkościami są teraz naprężenia główne σ_1 i σ_2 oraz kąt α określający ustawienie przekrojów głównych na obrazie kostki.



Rys. 7.5. Rozwiązanie odwrotnego zagadnienia analizy stanu naprężenia

Zagadnienie odwrotne najłatwiej rozwiązać posługując się kołem Mohra. W kole tym (rys. 7.5b) znamy współrzędne punktu X , tj. σ_x i $+\tau$, i punktu Y , tj. σ_y i $-\tau$, reprezentujące naprężenia w przekrojach prostopadłych odpowiednio do osi x i osi y . Ponadto wiemy, że punkty te leżą na jednej średnicy, gdyż odpowiadające im przekroje ab i ac są do siebie prostopadłe (porównaj punkty N i N_1 na rys. 7.3b). Łącząc zatem punkty X i Y otrzymujemy środek A i promień AX , a więc wszystkie dane potrzebne do wykreślenia koła Mohra. Punkty 1 i 2 przecięcia tego koła z osią σ_α dają odcinki $\overline{O1}$ i $\overline{O2}$ reprezentujące w obranej skali naprężenia główne σ_1 i σ_2 . Ponadto odczytujemy kąty 2α i 2β równe podwójnym kątom, które na obrazie kostki oś x tworzy z osiami 1 i 2 określającymi główne przekroje. Jak widać, przejście na kole Mohra od danego punktu X do poszukiwanego punktu 1 odbywa się wzdłuż koła. W tym samym zatem kierunku musi zachodzić na obrazie kostki przejście od danej osi x do poszukiwanej osi 1 (rys. 7.5c). Podobnie określamy położenie osi 2 . Rysując na koniec przekroje prostopadłe do znalezionych osi 1 i 2 i działające w tych przekrojach naprężenia σ_1 i σ_2 mamy szukane rozwiązanie.

Opisana konstrukcja wykreśliła ułatwia sformułowanie analitycznych zależności między wielkościami danymi, tj. σ_x , σ_y , τ , a poszukiwanymi, tj. σ_1 , σ_2 i α . Z rysunku 7.5b widać, że

$$\overline{OA} = (\sigma_x + \sigma_y)/2, \quad \overline{AB} = (\sigma_x - \sigma_y)/2, \quad \overline{AX} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BX}^2}, \quad \overline{BX} = \tau,$$

skąd otrzymujemy poszukiwane wielkości;

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \overline{OA} \pm \overline{AX} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2}, \quad (7.5)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{\overline{BX}}{\overline{AB}} = -\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (7.6)$$

Znak minus we wzorze (7.6) wynika stąd, że dodatnim wartościom \overline{BX} i \overline{AB} odpowiada na rysunku kostki ujemny kąt α (rys. 7.5c).

Podobnie możemy obliczyć i inne wielkości, np.

$$\tau_{\max} = \overline{AX} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2}. \quad (7.7)$$

Wyniki (7.5)÷(7.7) stanowią analityczne rozwiązanie zadania odwrotnego równorzędnego metodzie wykreslonej. W teorii sprężystości i plastyczności stosuje się je często jako punkt wyjścia do dalszych rozważań. Istotną rzeczą jest przy tym pamiętać, że wszystkie te wyniki (analityczne i wykreslone) słuszne są, gdy ukośny przekrój, w którym badamy naprężenia, jest prostopadły do nieobciążonej ściany kostki (patrz rys. 7.2a).

Zadania

1. W kostce (rys. 7.3a) mamy $\sigma_1 = 60$ MPa, $\sigma_2 = -30$ MPa. Wyznaczyć naprężenia na bokach kostki, wyciętej jak na rys. 2.15, gdy $\alpha_1 = 20^\circ$.

Odp. $\sigma_{20^\circ} = \sigma_{200^\circ} = 49,5$ MPa, $\sigma_{110^\circ} = \sigma_{290^\circ} = -19,5$ MPa, $\tau_{20^\circ} = -\tau_{110^\circ} = \tau_{200^\circ} = -\tau_{290^\circ} = 28,9$ MPa.

2. Z kostki (rys. 7.4c) wycięto: a) dowolny graniastosłup, b) walec kołowy. Jakie naprężenia panują na bocznej powierzchni?

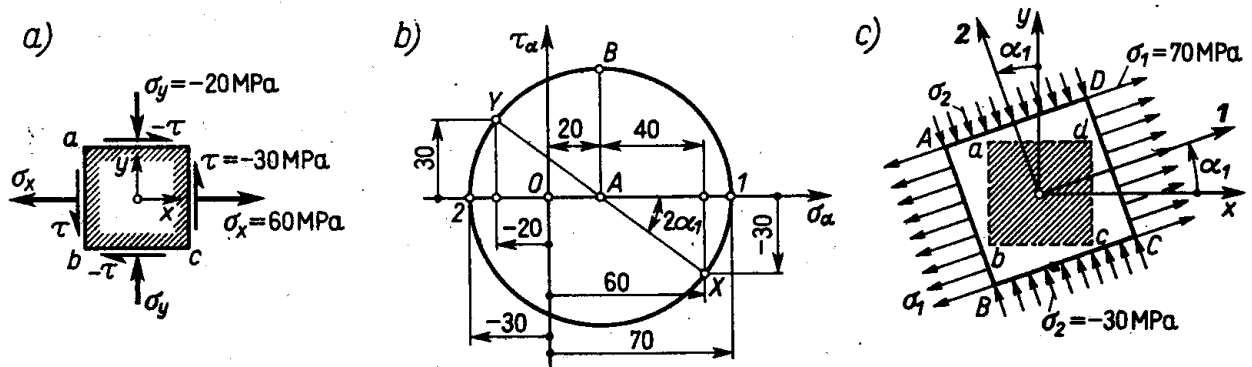
Odp. a) $\tau_\alpha \equiv 0$, $\sigma_\alpha = \sigma_1 = \sigma_2 = \text{const}$; b) to samo co w (a), gdyż walec można traktować jak graniastosłup o nieskończenie wielkiej liczbie boków.

3. Posługując się kołem Mohra (rys. 7.3b) dowieść, że: $\tau_\alpha^2 = (\sigma_1 - \sigma_\alpha)(\sigma_\alpha - \sigma_2)$.

Odp. Wiadomo, że \overline{BN} jest średnią geometryczną odcinków \overline{BI} i $\overline{2B}$, czyli $(\overline{BN})^2 = (\overline{BI}) \cdot (\overline{2B})$, c.b.d.d.

4. Podać warunek odnośnie do σ_1 i σ_2 (rys. 7.2a), aby istniały przekroje (ściślej rodziny równoległych przekrojów), w których $\sigma_\alpha = 0$. Narysować te przekroje, jeśli $\sigma_1 = -30$ MPa, $\sigma_2 = 50$ MPa.

Odp. Warunek: $\sigma_1 \sigma_2 < 0$ (patrz rys. 7.4d); $\text{tg } 2\alpha = \pm\sqrt{15}$, $\alpha = \pm 37,8^\circ$.



Rys. 7.6. Przykład liczbowy zagadnienia odwrotnego

5. W podanej kostce (rys. 7.6a) wyznaczyć wykreslnie (z koła Mohra) wartości głównych naprężeń i położenie głównych przekrojów.

Odp. Podanym zwrotom τ odpowiada ujemna rzędna dla punktu X i dodatnia dla punktu Y (rys. 7.6b). Po określeniu środka A i promienia $\overline{AX} = 50$ MPa otrzymujemy $\sigma_1 = 70$ MPa, $\sigma_2 = -30$ MPa, a ponadto $\text{tg } 2\alpha_1 = 0,75$, skąd $\alpha_1 \approx 18,4^\circ$. Kąt α_1 na obrazie kostki odmierzymy w tym samym kierunku co i kąt $2\alpha_1$ na kole Mohra przy przejściu od punktu X do punktu I . Kostka $ABCD$ odpowiadająca przekrojom głównym (rys. 7.6c) jest tą, z której wycięto pierwotną kostkę $abcd$ o danym stanie naprężeń.

6. W kostce (rys. 7.6a) zmieniono tylko σ_x na $\sigma_x = -60$ MPa. Obliczyć wartości naprężeń σ_1 i σ_2 oraz wartość kąta α .

Odp. Z wzorów (7.5): $\sigma_1 = -3,9$ MPa, $\sigma_2 = -76,1$ MPa; z wzoru (7.6) mamy $\operatorname{tg} 2\alpha = -2(-30)/(-40) = -1,5$, $2\alpha = 123^\circ 44'$, $\alpha = 61^\circ 52'$.

Uwaga. We wzorze (7.6) należy wziąć algebraiczną wartość τ odpowiadającą przekrojowi prostopadłemu do osi x , a odpowiedzi na kąt 2α poszukiwać w przedziale $(0, 180^\circ)$.

7. Zostawiając bez zmian σ_x i τ (rys. 7.6a) znaleźć wykreslnie taką wartość σ_y , aby stan naprężenia był prostym rozciąganiem.

Odp. Prowadzimy odcinek $O\bar{X}$ (rys. 7.6) i jego symetralną. Jej przecięcie z osią σ_x daje środek A_1 i promień A_1X nowego koła Mohra. Rzędna punktu Y jest nadal 30 MPa, skąd $\sigma_y = 15$ MPa, $\sigma_1 = 2A_1X = 75$ MPa.

8. Jak zmieniają się wyniki zadań 5 i 6, jeśli zwroty wszystkich składowych naprężeń zmienić na przeciwne?

Odp. Przekroje główne nie zmieniają się; wartości σ_1 i σ_2 są przeciwne.

9. W kostce (rys. 7.6a) znaleźć przekrój, w którym $\sigma_\alpha = |\tau_\alpha|$.

Odp. Rysując z punktu O (rys. 7.6b) dwie proste $\tau_\alpha = \pm\sigma_\alpha$ wyznaczamy na kole Mohra cztery punkty stanowiące cztery odpowiedzi. Przekroje są parami symetrycznie ustawione względem osi 1 (rys. 7.6c).

7.2. Uproszczona analiza trójwymiarowego stanu naprężenia

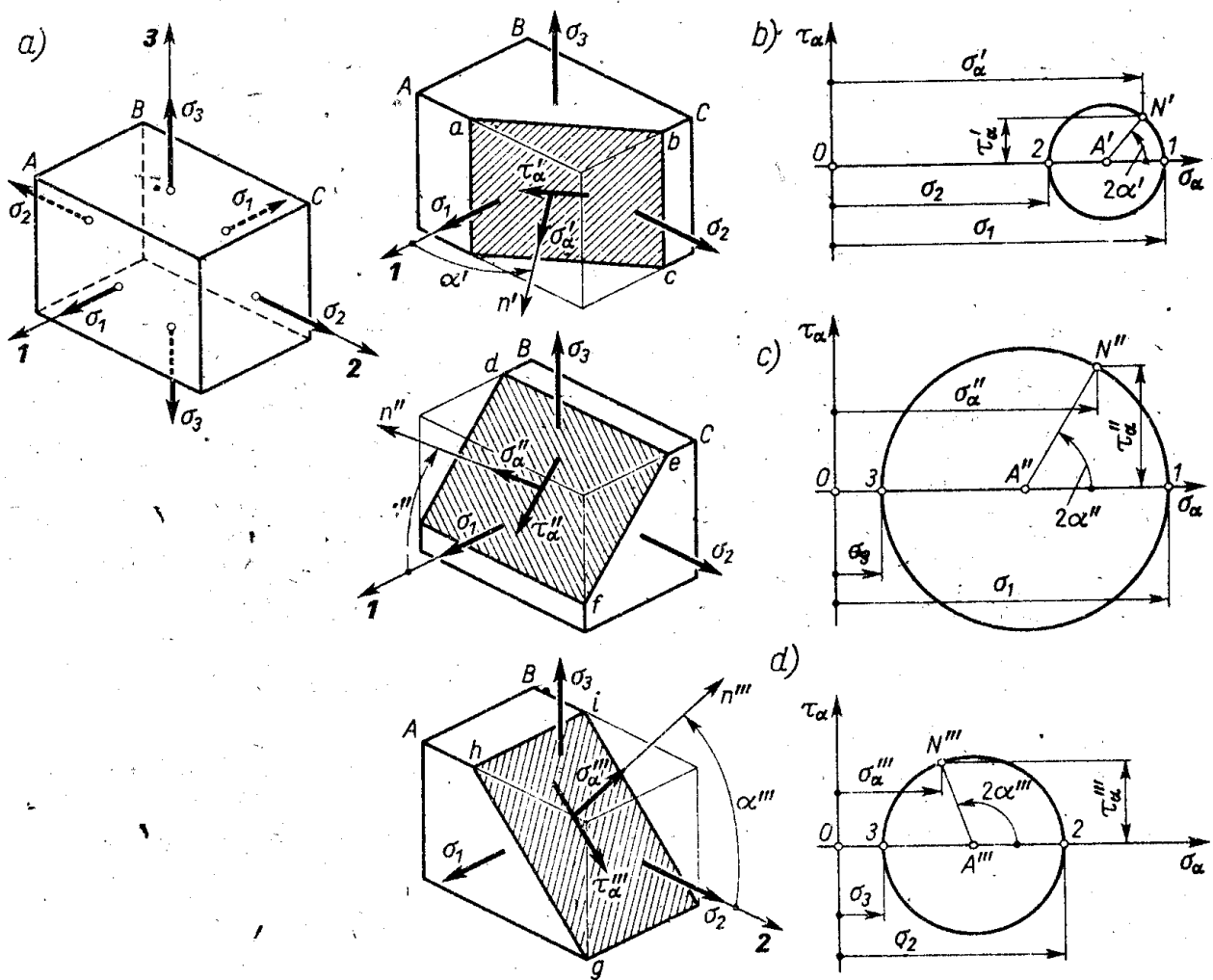
Logicznym uogólnieniem płaskiego stanu naprężenia jest stan trójwymiarowy, gdy na ściany kostki działają naprężenia normalne σ_1 , σ_2 i σ_3 (rys. 7.7a). Naprężenia te wobec braku naprężeń stycznych nazwiemy, jak poprzednio, *głównymi*. Zbadajmy teraz naprężenia w ukośnym przekroju abc równoległym do osi 3 (rys. 7.7b). Naprężenie σ_3 nie wpływa⁽¹⁾ tu zupełnie na σ'_α i τ'_α , które wyznaczone zostają jak w art. 7.1. W wyniku σ'_α i τ'_α reprezentowane są przez punkt N' koła Mohra zbudowanego dla głównych naprężeń σ_1 i σ_2 . Powtarzając to rozumowanie dla przekrojów def i ghi równoległych odpowiednio do osi 2 i 1 (rys. 7.7c, d) otrzymujemy punkty N'' i N''' określające składowe naprężenia σ''_α , τ''_α , σ'''_α , τ'''_α w tych przekrojach. Przenosząc te trzy koła Mohra na jeden wykres (rys. 7.8a) mamy obraz, który w analizie trójwymiarowego stanu naprężenia spełnia podobną rolę, jak pojedyncze koło Mohra dla stanu dwuwymiarowego. W teorii sprężystości bowiem dowodzi się, że naprężenia σ_n i τ_n w przekroju klm nachylonym do *wszystkich* osi 1 , 2 i 3 (rys. 7.8b) reprezentowane są pewnym punktem N leżącym w polu zakreskowanym na rys. 7.8a. Wynika stąd ważny wniosek, że maksymalne naprężenie styczne ma wartość równą promieniowi największego koła Mohra i jeśli $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, to

$$|\tau|_{\max} = \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right|. \quad (7.8)$$

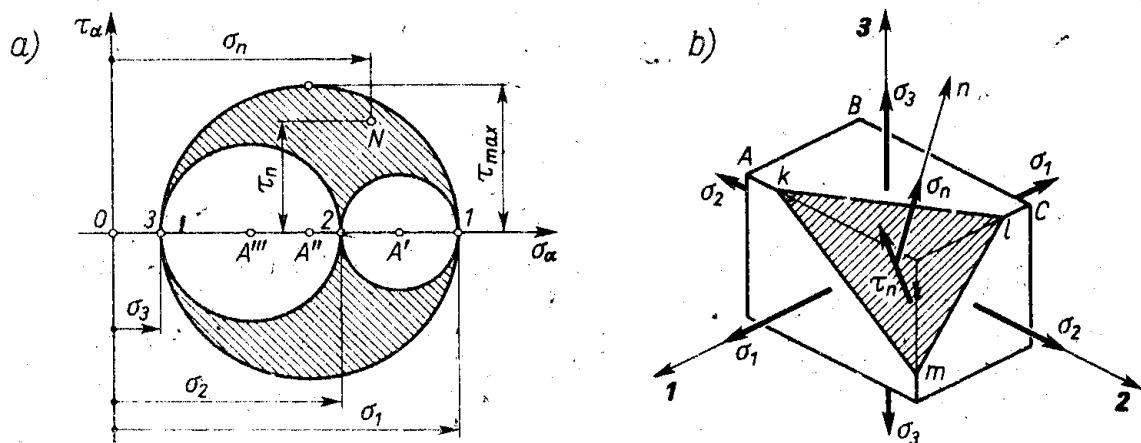
Widać również, że naprężenie τ_{\max} działa w przekroju, który jest równoległy do średniego naprężenia (σ_2) i jednocześnie dwusieczny w stosunku do pozostałych osi.

Przedstawiona analiza stanowi analogię do omówionego w art. 7.1 zagadnienia prostego. Rozwiązanie zagadnienia odwrotnego ograniczymy do wariantu, gdy w stadium

⁽¹⁾ Wypadkowa z naprężeń σ_3 na obydwóch ścianach poziomych jest równa zeru.

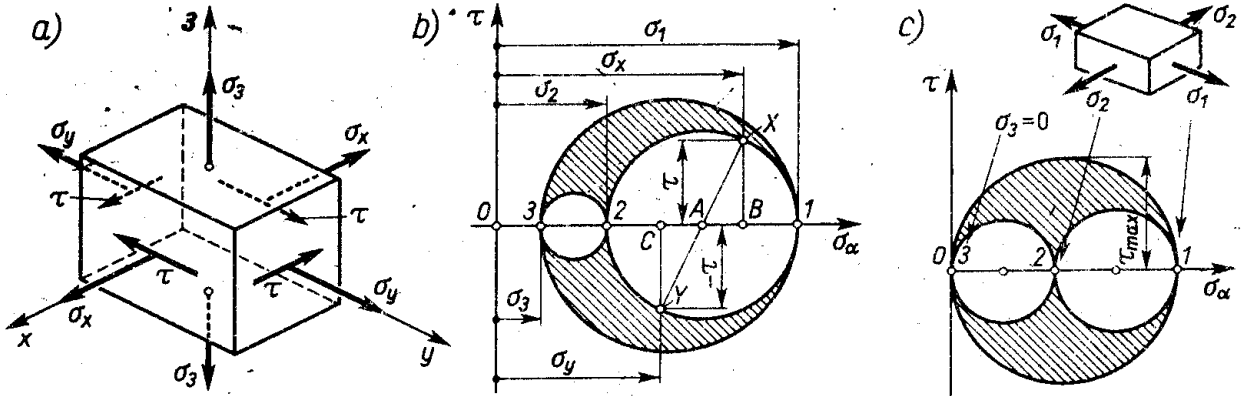


Rys. 7.7. Analiza trójwymiarowego stanu naprężenia przy szczególnym sposobie prowadzenia przekrojów



Rys. 7.8. Wynik analizy trójwymiarowego stanu naprężenia

wyjściowym jedno z naprężeń normalnych, np. σ_3 , jest główne (rys. 7.9a), w takiej bowiem postaci trójwymiarowy stan naprężenia występuje w przeważającej większości zagadnień technicznych. Porównując ten obraz z rys. 7.7b widzimy, że wyznaczenie pozostałych głównych naprężeń σ_1 i σ_2 jest zagadnieniem odwrotnym płaskiego stanu σ_x , σ_y i τ ,

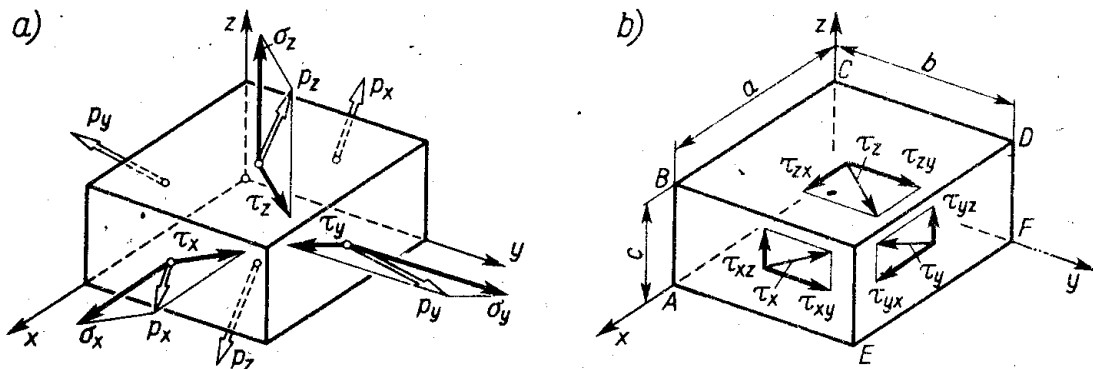


Rys. 7.9. Typowe zadanie odwrotne trójwymiarowego stanu naprężenia

a) obraz układu naprężeń; b) konstrukcja kół Mohra; c) wynik analizy, gdy $\sigma_3 = 0$.

a jego rozwiązanie stanowi koło Mohra $X1Y2$ (rys. 7.9b). Po naniesieniu punktu 3 reprezentującego naprężenie σ_3 dorysowujemy dwa pozostałe koła, dające pełny obraz trójwymiarowego stanu. Rozwiązanie to jest słuszne i dla dwuwymiarowego stanu (rys. 7.9c), w którym $\sigma_3 = 0$. Jak widać, takie uwzględnienie trzeciego naprężenia głównego o zerowej wartości jest istotne dla określenia τ_{max} , gdy pozostałe naprężenia główne σ_1 i σ_2 są tego samego znaku.

W odróżnieniu od przyjętego początkowo przedstawienia trójwymiarowego stanu przez naprężenia główne, ogólny obraz takiego stanu jest bardziej złożony (rys. 7.10a). Wypadkowe naprężenia p_x , p_y , p_z na poszczególnych parach ścian kostki są stałe co do



Rys. 7.10. Składowe ogólnego trójwymiarowego stanu naprężenia

a) układ wypadkowych naprężeń p_x , p_y , p_z i ich rozkład na składowe normalne σ_x , σ_y , σ_z i wypadkowe styczne τ_x , τ_y , τ_z ; b) rozkład τ_x , τ_y , τ_z na składowe τ_{xy} , ..., τ_{zx} .

wartości i kierunku, nie są one jednak prostopadłe do ścian. Określenie każdego z trzech naprężeń p wymaga podania trzech składowych. Mogłoby się więc wydawać, że do opisanego takiego stanu należy podać dziewięć niezależnych od siebie wartości, tzn. trzy skła-

dowe normalne $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ oraz sześć składowych stycznych⁽¹⁾ $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ (rys. 7.10b). Tak jednak nie jest, gdyż składowe te muszą spełniać sześć równań równowagi. Trzy z nich, a mianowicie równania sumy rzutów sił, są spełnione tożsamościowo. Nie dotyczy to jednak równań równowagi momentów i na przykład równanie takie względem osi przechodzącej przez środek kostki i równoległej do osi z daje zależność

$$\frac{\tau_{yx} A_{EFD} b}{2} + \frac{\tau_{yx} A_{ABC} b}{2} - \frac{\tau_{xy} A_{ABE} a}{2} - \frac{\tau_{xy} A_{CDF} a}{2} = 0, \quad (a)$$

w której $A_{EFD} = A_{ABC} = ac$, $A_{ABE} = A_{CDF} = bc$ oznaczają pola odpowiednich ścian EFD, \dots, CDF . Podstawienie tych wartości do równania (a) i skrócenie przez abc daje w wyniku

$$\tau_{yx} - \tau_{xy} = 0. \quad (b)$$

Pisząc analogiczne dwa równania równowagi momentów względem pozostałych osi otrzymujemy ostatecznie wynik

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad (7.9)$$

ujmujący ogólnie *zasadę symetrii naprężeń stycznych*, a mianowicie:

dwa składowe naprężenia styczne działające na dwóch prostopadłych ścianach i prostopadle do wspólnej ich krawędzi mają jednakowe wartości i są skierowane albo do tej krawędzi, albo od niej.

Zależność (7.9) stanowi uogólnienie zależności (d) z art. 2.5 i zależności (a) z art. 7.1, a różnica znaków jest tylko pozorna.⁽²⁾ Konsekwencją tej zależności jest, że liczba niezależnych wielkości określających ogólny stan naprężenia (rys. 7.10a) jest tylko sześć. Wielkości te, tj. $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ i τ_{zx} noszą nazwę *składowych stanu naprężenia*. Ich rola w nauce wytrzymałości materiałów jest podobna, jak pojęcie składowych wektorów w mechanice. Wyjaśnia to następująca analogia. Weźmy mianowicie wektor \mathbf{R} (rys. 2.16a) i potraktujmy osie x, y jako *ustalone*. Składowe P_1 i P_2 można wtedy traktować jak skalary, połączenie ich jednak w zespół, w którym skalar P_1 odpowiada osi x , a P_2 osi y , tworzy nową wielkość fizyczną, tj. wektor \mathbf{R} , podlegającą innym prawom (np. dodawania) niż elementy składowe. Identyczną sytuację mamy w kwestii naprężeń (rys. 7.10), gdzie p_x, p_y, p_z są *wektorami* związanymi z odpowiednimi ścianami kostki (analogia do skalarów P_1 i P_2), ich jednak zespół tworzy nową, podlegającą innym prawom niż wektory, wielkość fizyczną, tj. *stan naprężenia*. Na tym tle powinno być jasne, że *dodanie do siebie wektorów naprężeń działających w dwóch różnych przekrojach jest tak samo bezsensowne i błędne, jak algebraiczne dodanie składowych wektora na różne osie*.

⁽¹⁾ W znakowaniu tym pierwszy wskaźnik określa, że naprężenie działa na ścianie prostopadłej do osi o tym wskaźniku. Wskaźnik drugi określa oś, w kierunku której działa dana składowa. Tak więc τ_{zx} jest to składowe naprężenie styczne działające na ścianie prostopadłej do osi z i równoległe do osi x .

⁽²⁾ W art. 2.5 i 7.1 rozróżniono naprężenia styczne według tendencji obrotu kostki. Było to pożyteczne przy konstrukcji koła Mohra. W analizie trójwymiarowego stanu naprężenia utrzymanie poprzedniej umowy, aczkolwiek możliwe, nie jest celowe i prościej jest od razu założyć dodatnie zwroty τ , jak na rys. 7.10b.

Zadania

1. W kostce z rys. 7.7a jest $\sigma_1 = -60$ MPa, $\sigma_2 = 30$ MPa, $\sigma_3 = -10$ MPa. Narysować układ kół Mohra, wyznaczyć naprężenia w przekroju jak na rys. 7.7b, gdy $\alpha' = 30^\circ$. Obliczyć wartość τ_{\max} .

Odp. $\sigma'_\alpha = -37,5$ MPa, $\tau'_\alpha = -39,0$ MPa, dodatnie τ'_α jak na rys. 7.7b; $\tau_{\max} = 45,0$ MPa, w przekroju dwusiecznym ($\alpha' = 135^\circ$).

2. Na kostkę (rys. 7.8b) działają $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -50$ MPa. Wyznaczyć σ_n i τ_n w dowolnym przekroju klm kostki.

Odp. $\sigma_n \equiv -50$ MPa, $\tau_n \equiv 0$, bo układ kół Mohra staje się punktem.

3. W kostce (rys. 7.9a): $\sigma_x = -80$ MPa, $\sigma_y = 0$, $\tau = 40$ MPa, $\sigma_z = \sigma_3 = 50$ MPa. Wyznaczyć τ_{\max} i położenie przekroju, w którym ono działa.

Odp. $\tau_{\max} \approx 73,3$ MPa działa w przekroju równoległym do osi 2 określonym kątem $\alpha'' = 135^\circ$ (rys. 7.7c).

4. W kostce (rys. 7.9a): $\sigma_x = \sigma_y$, zaś $\tau = 30$ MPa i $\sigma_z = \sigma_3 = 50$ MPa. W jakich granicach można zmieniać σ_x , aby $\tau_{\max} < 50$ MPa?

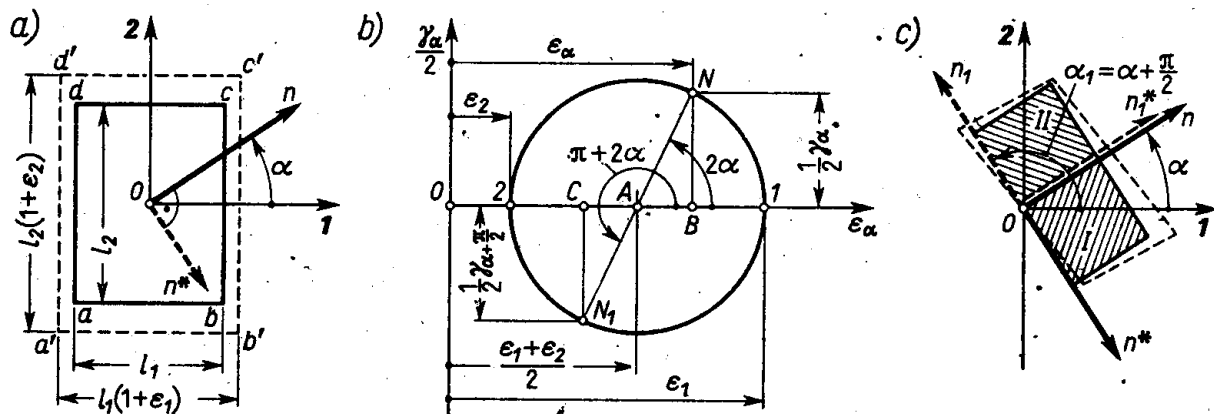
Odp. Zadanie najlepiej rozwiązać wykreślnie. Ostateczny wynik jest -20 MPa $< \sigma_x = \sigma_y < 120$ MPa.

5. W kostce (rys. 7.9a): $\sigma_y = 20$ MPa, $\tau = 30$ MPa, $\sigma_z = \sigma_3 = 50$ MPa. W jakich granicach można zmieniać σ_x , aby $\tau_{\max} < 50$ MPa?

Odp. Zadanie najlepiej rozwiązać wykreślnie. W wyniku -37 MPa $< \sigma_x < 100$ MPa.

7.3. Uproszczona analiza stanu odkształcenia

Analizę stanu odkształcenia rozpoczniemy od zbadania przypadku, gdy elementarna kostka $abcd$ doznaje wydłużeń względnych ε_1 i ε_2 w kierunku osi 1 i 2, a kąty proste w narożach nie zmieniają się (rys. 7.11a). Wyznamy odkształcenie względne ε_α dla elementu



Rys. 7.11. Analiza płaskiego stanu odkształcenia

leżącego na osi n . Zadanie to sprowadza się do rozpatrzonego już w art. 2.5 przypadku (rys. 2.17), jeśli zamiast wprowadzonych tam oznaczeń: odkształcenia ε w kierunku osi x i odkształcenia $-\nu\varepsilon$ w kierunku y wstawić odpowiednio ε_1 i ε_2 . Zostawiając czytelnikowi dokonanie tych podstawień podajemy od razu poszukiwany wynik zastępujący wzór (g) z art. 2.5, a mianowicie

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha. \quad (7.10)$$

Podobnie zamiast wzoru (j) z art. 2.5 otrzymujemy

$$\gamma_\alpha = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (7.11)$$

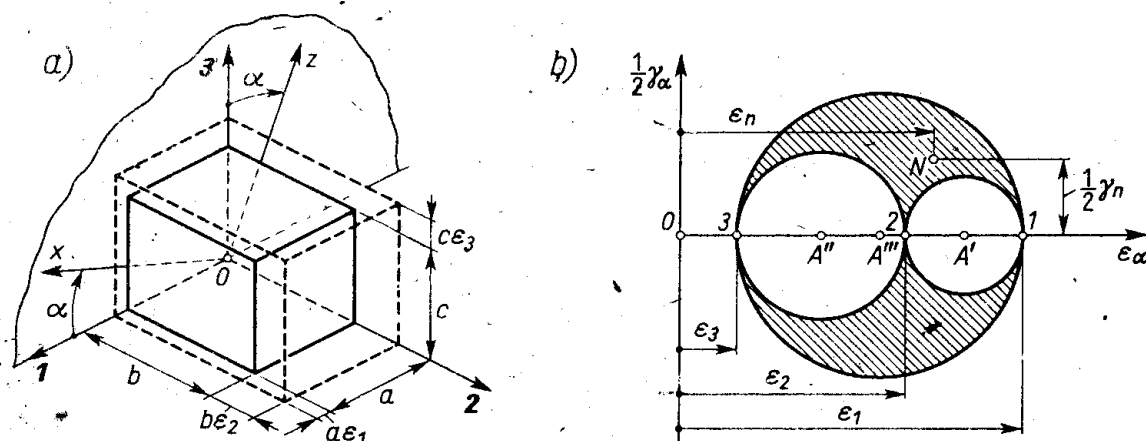
jako kąt odkształcenia postaciowego między osią On a osią stowarzyszoną On^* , obróconą względem On o kąt $(-\pi/2)$.

Porównując wzory (7.10) i (7.11) z wynikami analizy stanu naprężenia (wzory 7.1 i 7.2) widzimy, że są one identyczne, jeśli zamiast σ_α i τ_α wstawić odpowiednio ε_α i $\gamma_\alpha/2$, a kierunek normalnej n do przekroju (rys. 7.2) utożsamić z kierunkiem On , w którym określamy odkształcenie ε_α . Przy zachowaniu tych reguł wszystkie wnioski i rozważania z art. 7.1 można bez zmian przenieść na analizę stanu odkształcenia. W szczególności dotyczy to koła Mohra dla odkształceń (rys. 7.11b), w którym punkt N reprezentuje ε_α i $\gamma_\alpha/2$ odpowiadające kierunkowi On , a punkt N_1 wielkości $\varepsilon_{\alpha+(\pi/2)}$ i $\gamma_{\alpha+(\pi/2)}/2$, gdy kierunkiem podstawowym jest On_1 , a stowarzyszonym On_1^* . Widać, że $\gamma_{\alpha+(\pi/2)} = -\gamma_\alpha$. Jest to jasne, gdyż zmniejszeniu kąta nOn^* towarzyszy takie samo zwiększenie kąta $n_1On_1^*$ (rys. 7.11c). Ponadto mamy, że

$$\gamma_{\max} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (7.12)$$

odpowiada kierunkowi dwusiecznej między osiami **1** i **2**. Tak samo transponujemy pojęcia prostopadłych do siebie *kierunków głównych*, które po odkształceniu zostają prostopadłe ($\gamma_\alpha = 0$). Odpowiadające kierunkom głównym *wydłużenia główne* ε_1 i ε_2 są ekstremalnymi wartościami wszystkich wydłużeń ε_α . Podobne wreszcie są zagadnienia. Tak więc mamy zagadnienia *proste* (dane kierunki główne oraz ε_1 i ε_2 , poszukiwane ε_α i γ_α w podanym kierunku) i *odwrotne*, gdy w stadium wyjściowym są dane wydłużenia ε_x i ε_y w kierunku osi x i y oraz kąt γ_{xy} odpowiadający tym osiom, a szukamy głównych kierunków i głównych wydłużeń.

Otrzymane wyniki umożliwiają analizę trójwymiarowego stanu odkształcenia, gdy elementarna kostka zostając prostopadłościanem doznaje względnych odkształceń $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$



Rys. 7.12. Analiza trójwymiarowego stanu odkształcenia

w kierunku osi **1, 2, 3** (rys. 7.12a). Określenie odkształceń względnych w kierunkach prostopadłych do siebie osi x i z leżących w płaszczyźnie **(1, 3)** jest powtórzeniem zadania z rys. 7.11. W rezultacie te odkształcenia ε_x i ε_z oraz kąt odkształcenia postaciowego γ_{xz}

reprezentowane są punktami koła Mohra zbudowanego na odkształceniach ε_1 i ε_3 , jako głównych. Podobnie dla osi leżących w płaszczyznach **(1, 2)** i **(2, 3)** otrzymujemy punkty kół Mohra zbudowanych odpowiednio na odciętych ε_1 i ε_2 , oraz na ε_2 i ε_3 (rys. 7.12b). Okazuje się, że dla dwóch dowolnie zorientowanych w przestrzeni i prostopadłych do siebie kierunków wydłużenie ε_n w jednym z kierunków i kąt odkształcenia postaciowego γ_n między tymi kierunkami jest odwzorowany punktem N leżącym w zakreskowanym obszarze.

To ostatnie, podane bez dowodu, stwierdzenie i analiza rys. 7.12 pozwala sformułować następujące podstawowe wnioski;

a. W każdym stanie odkształcenia istnieją tylko trzy kierunki, tzw. *główne*, między którymi pierwotne kąty proste nie ulegają zmianie. Odpowiadające tym kierunkom względne odkształcenia $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ noszą nazwę *odkształceń głównych*.

b. Maksymalny kąt odkształcenia postaciowego jest równy średnicy największego koła Mohra dla danego stanu odkształcenia.

Badanie zmian wymiarów i postaci kostki uzupełnimy określeniem zmian pola ścian i objętości kostki. Zauważmy, że pierwotne długości a, b, c boków kostki są po odkształceniu

$$a(1+\varepsilon_1), \quad b(1+\varepsilon_2), \quad c(1+\varepsilon_3). \quad (a)$$

Zmiana $\Delta A_{1,2}$ pola $A_{1,2} = ab$ ściany w płaszczyźnie **(1, 2)** jest

$$\Delta A_{1,2} = a(1+\varepsilon_1)b(1+\varepsilon_2) - ab \approx ab(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \quad (b)$$

gdyż iloczyn $\varepsilon_1\varepsilon_2$ można pominąć jako małą wyższego rzędu. Względną zmianą pola jest iloraz

$$\Delta A_{1,2}/A_{1,2} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (c)$$

Podobnie względne zmiany pól $A_{2,3} = bc$ i $A_{3,1} = ca$ są

$$\Delta A_{2,3}/A_{2,3} = \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \Delta A_{3,1}/A_{3,1} = \varepsilon_3 + \varepsilon_1, \quad (d)$$

czyli słowami: względna zmiana pola danej ściany jest równa algebraicznej sumie względnych odkształceń w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach leżących na tej ścianie.

Analogicznie obliczamy zmianę ΔV objętości $V = abc$ kostki

$$\Delta V = a(1+\varepsilon_1)b(1+\varepsilon_2)c(1+\varepsilon_3) - abc \approx abc(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

gdzie znowu zaniedbano iloczyny odkształceń ε . Względna zmiana objętości $e = \Delta V/V$ jest równa algebraicznej sumie względnych odkształceń w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (7.13)$$

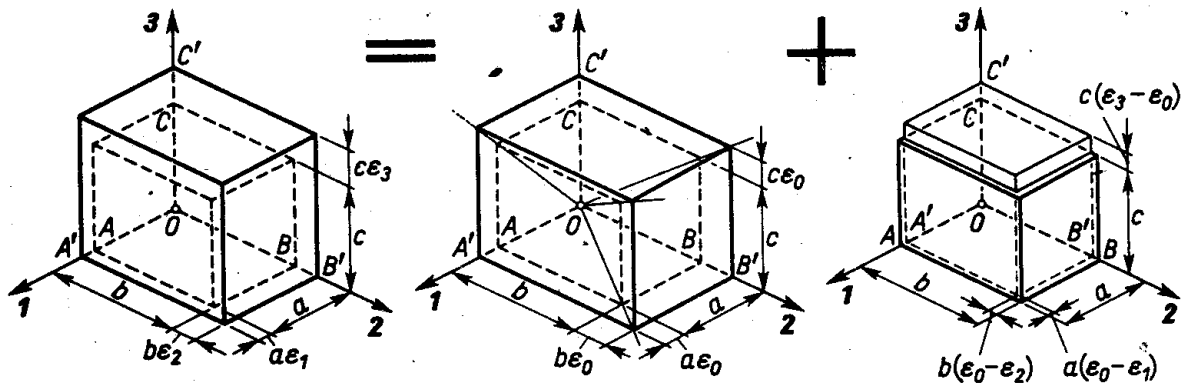
Wielkości wyrażone wzorami (c), (d), (7.13) są liczbami oderwanymi, które należy traktować jako cm^2/cm^2 lub cm^3/cm^3 .

Każdy ogólny stan odkształcenia można przedstawić jako superpozycję dwóch stanów (rys. 7.13). Pierwszy z nich ma jednakowe w kierunkach osi **1, 2, 3** względne odkształcenie

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3 \quad (e)$$

i taką samą wartość e jak ogólny stan. Układ kół Mohra (rys. 7.12) redukuje się do punktu, a więc w tym stanie nie ma żadnych odkształceń postaci i w każdym kierunku $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Oznacza to, że po odkształceniu kostki, a ogólnie dowolna bryła, zachowuje swój kształt (sześcián zostaje sześciánem, kula — kulą) zmieniając jednakowo wszystkie wymiary liniowe. W stanie drugim zmiana objętości jest, jak wynika z wzoru (7.13), równa zero, a więc zachodzi tu tylko zmiana postaci ciała (kostki). Biorąc te cechy pod uwagę nazywamy stan pierwszy *czystym odkształceniem objętościowym*, drugi *czystym odkształceniem postaciowym*. W tej zatem terminologii każdy stan odkształcenia daje się przedstawić jako suma czystego odkształcenia objętościowego i czystego odkształcenia postaciowego.



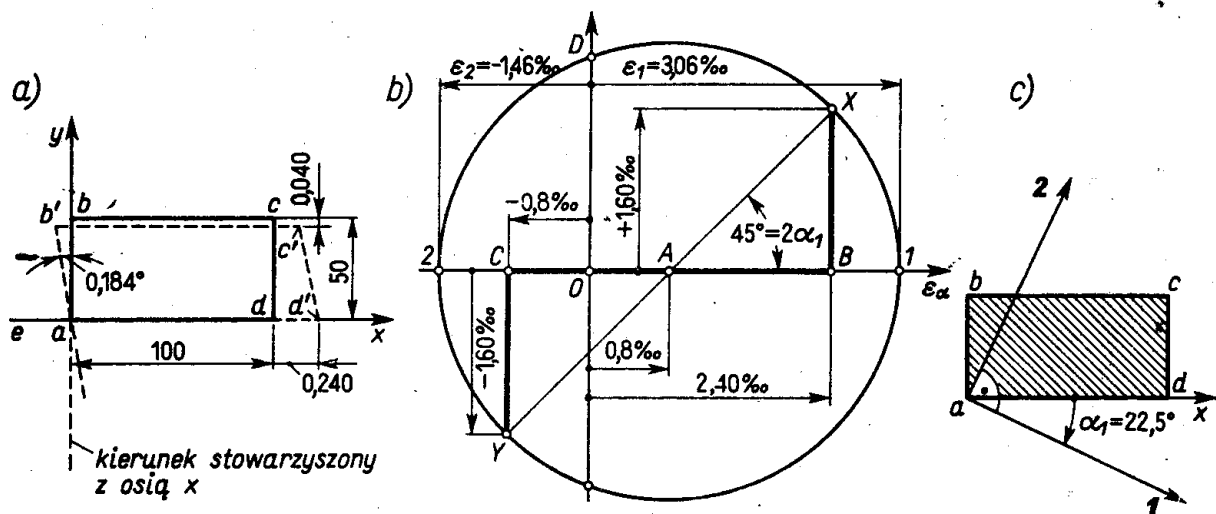
Rys. 7.13. Rozkład ogólnego stanu odkształcenia na czysto objętościowy i czysto postaciowy

Opisana interpretacja ma duże znaczenie techniczne. Z doświadczeń okazuje się mianowicie, że podczas przeróbki plastycznej $e \approx 0$ dla każdego elementu ciała, czyli że w takiej przeróbce zachodzi prawie wyłącznie czyste odkształcenie postaciowe.

Zadania

1. Kwadratowy element o boku $l_1 = l_2 = 10$ cm (rys. 7.11a) doznał skrócenia krawędzi ab o 0,10 mm i wydłużenia krawędzi ad o 0,15 mm. Wyznaczyć ϵ_α i γ_α , gdy $\alpha = -30^\circ$.

Odp. $\epsilon_{-30^\circ} = -0,37\%$, $\gamma_{-30^\circ} = 2,16 \cdot 10^{-3}$ rad $\approx 0,124^\circ$.



Rys. 7.14. Przykład rozwiązania zagadnienia odwrotnego

2. Prostokątny element doznał odkształceń podanych na rys. 7.14a. Stosując koło Mohra wyznaczyć główne kierunki i wartości $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

Odp. Rozwiązanie podają rys. 7.14b i c, przy czym $\varepsilon_x = 2,4\text{‰}$, $\varepsilon_y = -0,8\text{‰}$. Kąt $\gamma_{xy} = +0,184^\circ = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad} > 0$, bo podstawowemu kierunkowi x odpowiada zmniejszenie kąta prostego.

3. Wyznaczyć całkowitą zmianę powierzchni i objętości kostki (rys. 7.12a), jeśli $a \times b \times c = 5 \times 8 \times 7 \times 10 \text{ cm}$, zaś $\varepsilon_1 = -0,5\text{‰}$, $\varepsilon_2 = 0,3\text{‰}$, $\varepsilon_3 = 0,6\text{‰}$.

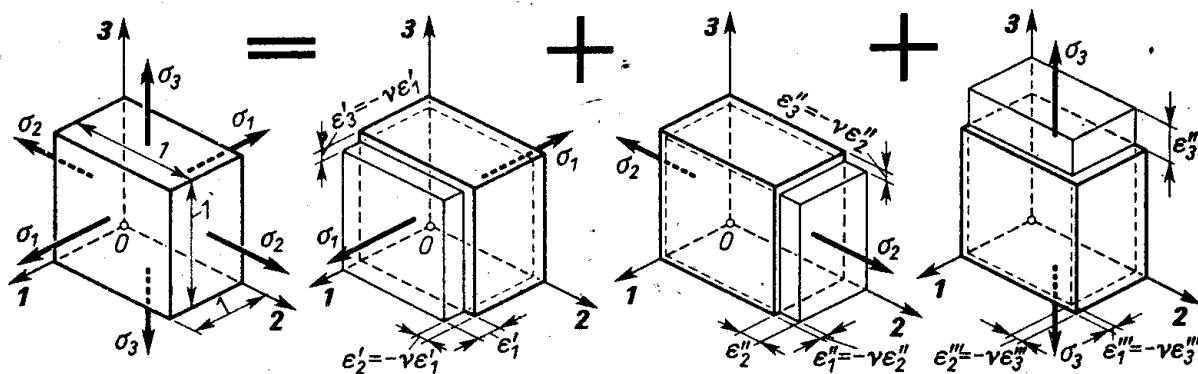
Odp. $0,138 \text{ cm}^2$; $0,160 \text{ cm}^3$.

4. Obliczyć zmianę pola poprzecznego przekroju rozciąganego pręta (rys. 1.14a), jeśli $\varepsilon = \sigma/E = 1,5\text{‰}$, $\nu = 0,3$, $A = 10 \text{ cm}^2$. Jaka jest względna zmiana objętości?

Odp. Każda elementarna kostka (rys. 1.14b) ma w kierunku poprzecznym odkształcenia $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\nu\varepsilon = -0,45\text{‰}$. Zmiana pola jest więc: $\Delta A = A(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -2\nu\varepsilon A = -0,9 \text{ mm}^2$ (zmniejszenie pola). Odkształcenie objętościowe $e = \varepsilon(1 - 2\nu) = 0,6\text{‰}$.

7.4. Uogólnione prawo Hooke'a

W dotychczasowym ujęciu stany naprężenia i odkształcenia traktowano jako zjawiska niezależne. Tak jednak nie jest, gdyż, jak to pokazano w przypadku rozciągania, istnieje między nimi przyczynowy związek. Na ogół związek ten nie jest prosty i przechodzi różne fazy zależnie od wartości σ i od przebiegu procesu obciążania (rys. 1.16). Tylko dla stanów sprężystych, gdy zależność $\sigma(\varepsilon)$ jest liniowa i jednoznaczna⁽¹⁾, ogólny związek między



Rys. 7.15. Trójwymiarowy stan naprężenia jako superpozycja trzech stanów prostego rozciągania

składowymi obydwóch stanów, tzw. *uogólnione prawo Hooke'a*, ma prostą postać. Rozkładając mianowicie według zasady superpozycji ogólny stan naprężenia (rys. 7.15) na trzy stany prostego rozciągania z wzorów (1.10) i (1.11) mamy dla każdego z nich następujące wydłużenia względne:

$$\text{stan I: } \varepsilon'_1 = \sigma_1/E, \quad \varepsilon'_2 = -\nu\sigma_1/E, \quad \varepsilon'_3 = -\nu\sigma_1/E,$$

$$\text{stan II: } \varepsilon''_1 = -\nu\sigma_2/E, \quad \varepsilon''_2 = \sigma_2/E, \quad \varepsilon''_3 = -\nu\sigma_2/E,$$

$$\text{stan III: } \varepsilon'''_1 = -\nu\sigma_3/E, \quad \varepsilon'''_2 = -\nu\sigma_3/E, \quad \varepsilon'''_3 = \sigma_3/E.$$

⁽¹⁾ Gdy istnieją trwałe odkształcenia, wówczas zależność $\sigma(\varepsilon)$ jest niejednoznaczna, jak na rys. 1.16a, gdzie danej wartości σ może odpowiadać punkt na linii OA , EF itd.

Jednoczesnemu działaniu σ_1, σ_2 i σ_3 odpowiadają odkształcenia $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ i ε_3 równe sumie skutków składowych. W wyniku uogólnione prawo Hooke'a otrzymuje postać:

$$\varepsilon_1 = [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]/E, \quad \varepsilon_2 = [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]/E, \quad \varepsilon_3 = [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]/E. \quad (7.14)$$

• Podobnie określamy względną zmianę objętości

$$e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (1 - 2\nu)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/E. \quad (7.15)$$

W ciekawym z wielu powodów stanie hydrostatycznego ściskania⁽¹⁾ $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ i wtedy z wzorów (7.14) i (7.15) mamy

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -p(1 - 2\nu)/E, \quad (a)$$

$$e = -3p(1 - 2\nu)/E = -p/K, \quad (7.16)$$

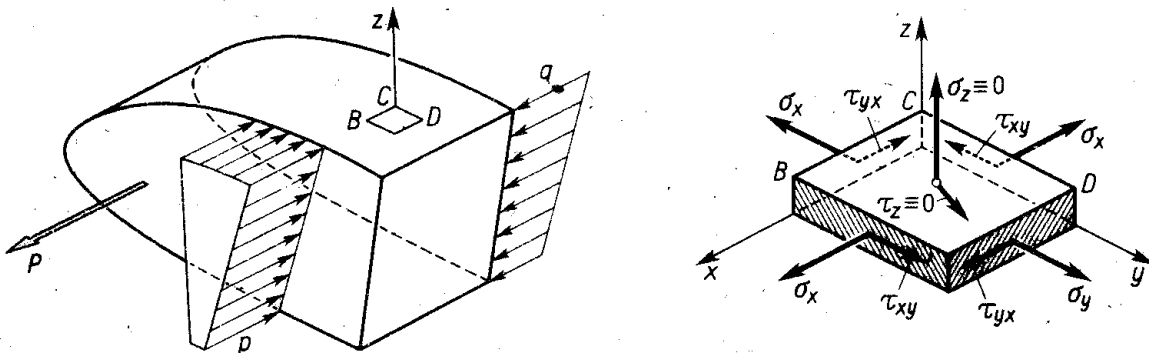
gdzie $K = E/3(1 - 2\nu)$ — tzw. *moduł ściśliwości* materiału jest stałą zależną od podstawowych stałych, tj. E i ν . Z zależności (a) wynika, że w tym stanie odkształcenie jest czysto objętościowe (rys. 7.13). Z doświadczeń wiadomo ponadto, że w tym stanie wszystkie ciała zmniejszają swą objętość, czyli że $e < 0$. Oznacza to, że $K > 0$, a w konsekwencji $\nu < 0,5$, jak to już podano w art. 1.7.

Dla większości materiałów moduł K jest rzędu modułu E . Do wyjątków należy guma, dla której $\nu = 0,47 \div 0,495$, a K może być o dwa rzędy większy od E . Ponieważ moduły E oraz G są dla gumy małe (rzędu $2 \div 8$ MPa), wynika stąd, że guma łatwo poddaje się zmianom postaci, a bez porównania trudniej zmianom objętości. Fakt ten należy brać pod uwagę przy kształtowaniu elementów gumowych, gdy zależy nam na ich dużej podatności.

Wzory (7.14) określają odkształcenia w funkcji naprężeń. Zagadnienie *odwrotne* spotykamy w praktyce laboratoryjnej, gdy z pomiarów znamy wartości $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ i ε_3 , a szukamy wartości σ . Odpowiedź otrzymujemy rozwiązując układ równań (7.14):

$$\sigma_1 = \mu e + 2G\varepsilon_1, \quad \sigma_2 = \mu e + 2G\varepsilon_2, \quad \sigma_3 = \mu e + 2G\varepsilon_3, \quad (7.17)$$

gdzie symbole e i G są już znane, a $\mu = \nu E/(1 + \nu)(1 - 2\nu)$.



Rys. 7.16. Stan naprężenia na swobodnej powierzchni ciała

Jako szczególny przypadek stanu ogólnego zbadajmy płaski stan naprężenia. W tym stanie, między innymi, znajdują się wszystkie elementy swobodnej powierzchni dowolnego

⁽¹⁾ Najprostszym sposobem jego realizacji jest działanie ciśnienia p cieczy na ciało w niej zanurzone. Badanie tego stanu daje wiele rewelacji o fizycznych właściwościach materiałów.

ciała (rys. 7.16), to znaczy takiej, na którą nie działają siły powierzchniowe. Porównując bowiem taką elementarną kostkę, której swobodna ścianka BCD ma $\sigma_z \equiv 0$, $\tau_z \equiv 0$, z kostką (rys. 7.10) widzimy, że oddziaływania reszty ciała mają postać płaskiego stanu naprężenia, gdyż $\tau_{zx} = \tau_{xz} = 0$ i $\tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$. Jeśli ten stan jest przedstawiony przez naprężenia główne ($\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\tau_{xy} = 0$, $\sigma_z = \sigma_3 = 0$), to z wzorów (7.14) mamy

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \nu\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \nu\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{\nu(\sigma_1 + \sigma_2)}{E}. \quad (7.18)$$

Zależności (7.18) mają to samo znaczenie co poprzednie wzory (7.14). Zagadnienia odwrotne mają nieco inną postać, albowiem tylko dwie wielkości ε są niezależne. W praktyce laboratoryjnej tymi wielkościami są zazwyczaj ε_1 i ε_2 , gdyż ich pomiar jest najłatwiejszy. Rozwiązując pierwsze i drugie równanie (7.18) względem σ_1 i σ_2 , mamy

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1). \quad (7.19)$$

Podane tutaj uogólnione prawo Hooke'a słuszne jest tylko dla sprężystych materiałów izotropowych, gdyż milcząco założono, że działanie naprężeń w kierunkach osi **1, 2, 3** podlega tym samym prawom (1.10) i (1.11). W materiałach anizotropowych analogiczne zależności są bardziej złożone.⁽¹⁾ Również bardziej złożona jest kwestia korelacji kierunków głównych odkształceń i głównych naprężeń. W materiałach izotropowych, jak to wynika z doświadczeń nad rozciąganiem (rys. 1.8), kierunki te pokrywają się, natomiast w materiałach anizotropowych na ogół tak nie jest.

Zadania

1. Na duralową kostkę ($E = 7 \cdot 10^4$ MPa, $\nu = 0,35$) działają główne naprężenia: $\sigma_1 = 120$ MPa, $\sigma_2 = -80$ MPa, $\sigma_3 = 60$ MPa. Wyznaczyć główne odkształcenia względne oraz e i γ_{\max} .

Odp. $\varepsilon_1 = 1,82\%$, $\varepsilon_2 = -2,04\%$, $\varepsilon_3 = 0,66\%$, $e \approx 0,44\%$, $\gamma_{\max} = 3,86 \cdot 10^{-3}$ rad.

2. Pomierzone doświadczalnie główne odkształcenia stalowej kostki ($E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$) są: $\varepsilon_1 = -0,5\%$, $\varepsilon_2 = 0,7\%$, $\varepsilon_3 = 0,3\%$. Wyznaczyć główne naprężenia i wartość τ_{\max} .

Odp. $\sigma_1 = -20$ MPa, $\sigma_2 = 174$ MPa, $\sigma_3 = 109$ MPa, $\tau_{\max} = 97$ MPa.

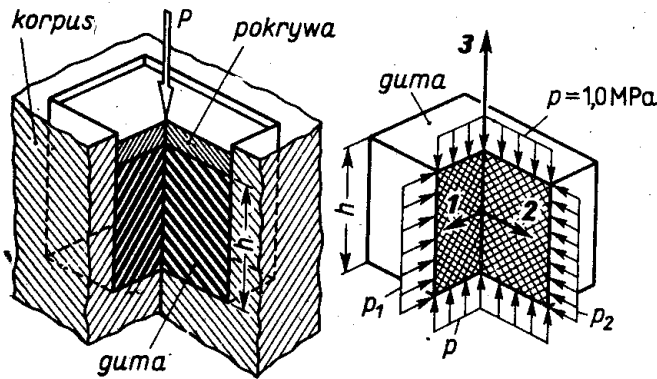
3. Jak zmieni się odkształcenie ściskanej gumowej kostki ($E = 4$ MPa, $\nu = 0,49$, $p = 1$ MPa), jeśli przed odkształceniem włożyć ją bez luzu we wnękę nieodkształcalnego korpusu (rys. 7.17)? Tarcie między gumą a korpusem można pominąć. $h = 5$ cm.

Odp. Pierwotnie $\Delta h' = -hp/E = -12,5$ mm. Po włożeniu kostki w korpus stan naprężenia tworzą: znane $\sigma_3 = -p = -1$ MPa i nieznane oddziaływania korpusu na kostkę $\sigma_1 = -p_1$, $\sigma_2 = -p_2$. Korpus jest nieodkształcalny, a więc $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ i z (7.14) mamy: $\sigma_1 = \sigma_2 = -\nu p/(1-\nu) = -0,96$ MPa oraz $\varepsilon_3 \approx -1,48\%$ i $\Delta h'' = h\varepsilon_3 = -0,74$ mm. Stosunek $\Delta h'/\Delta h'' \approx 17$. Ten duży wzrost sztywności może mieć w praktyce znaczenie dodatnie lub ujemne, zależnie od przeznaczenia elementu.

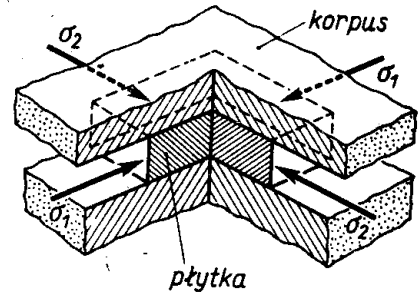
4. Jak zmieniają się wyniki poprzedniego zadania, jeśli wnęka w korpusie i kostka mają kształt cylindra?

Odp. Nie zmieniają się, jeśli jest to samo p .

⁽¹⁾ Patrz: M. T. Huber, *Teoria sprężystości*, cz. 1, Warszawa 1954, PWN, również S. G. Lechnicki, *Teoria uprugosti anizotropnego tiela*, Moskwa-Leningrad 1950, Gos. Izdat, Tiech. Teoriet. Lit.



Rys. 7.17.



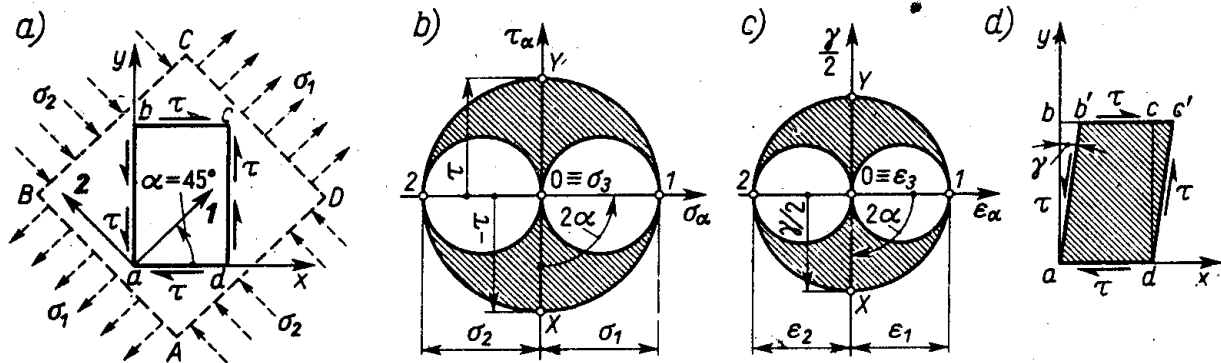
Rys. 7.18.

5. Na zamkniętą między pokrywami nieodkształcalnego korpusu cienką płytkę działają $\sigma_1 = -100 \text{ MPa}$ i $\sigma_2 = -60 \text{ MPa}$ (rys. 7.18). Obliczyć naciski płytki na korpus, jeśli $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0,28$.

Odp. Ponieważ $\epsilon_3 = 0$, zatem $\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2) = -45 \text{ MPa}$, a nacisk na pokrywy korpusu $p = -\sigma_3 = 45 \text{ MPa}$.

7.5. Uwagi końcowe

Treść tego rozdziału dzieli się na trzy fragmenty. Pierwszy z nich to analiza stanu naprężenia. Otrzymane w jej wyniku zależności dają możliwość określenia naprężeń w dowolnym przekroju, o ile tylko znamy naprężenia na ścianach kostki. Ten ostatni warunek, tj. znajomość sześciu składowych stanu naprężenia, jest konieczny i wystarczający do jednoznacznego rozwiązania zagadnienia. Przytoczone przykłady wskazują, że dany stan naprężenia można różnie przedstawić zależnie od sposobu wycięcia elementarnej kostki. Najprostszym z tych sposobów jest przedstawienie stanu przez naprężenia główne.



Rys. 7.19. Analiza stanu czystego ścinania

Fragment drugi obejmujący analizę stanu odkształcenia stanowi pełną analogię do pierwszego i daje identyczne wyniki, jeśli tylko zamiast naprężeń σ_α i τ_α wstawić odpowiednio ϵ_α i $\gamma_\alpha/2$. Wspólną cechą obydwóch analiz jest, że wyniki nie zależą zupełnie od właściwości materialu, w pierwszym bowiem przypadku są one następstwem warunków równowagi, w drugim — następstwem przesłanek geometrycznych. Jednoznaczny związek

obydwoh stanów występuje tylko dla ciała sprężystego. Dla materiałów izotropowych wyraża się on uogólnionym prawem Hooke'a omówionym jako trzeci fragment rozdziału.

Na tle tych uwag celowe jest właściwe umieszczenie stanu czystego ścinania. Według definicji z art. 3.1 stan ten cechuje działanie samych tylko naprężeń τ (rys. 7.19a), podczas gdy ściany kostki równoległe do płaszczyzny rysunku są swobodne, tj. $\sigma_3 = 0$. Obliczone z kół Mohra (rys. 7.19b) naprężenia główne są

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = -\tau, \quad \sigma_3 = 0, \quad (a)$$

przy czym σ_1 i σ_2 działają na bokach kostki $ABCD$ obróconej o kąt $\alpha = \pi/4$ względem osi x . Tym naprężeniom odpowiadają główne odkształcenia wyznaczone z wzorów (7.14)

$$\varepsilon_1 = \tau(1+\nu)/E, \quad \varepsilon_2 = -\tau(1+\nu)/E, \quad \varepsilon_3 = 0 \quad (b)$$

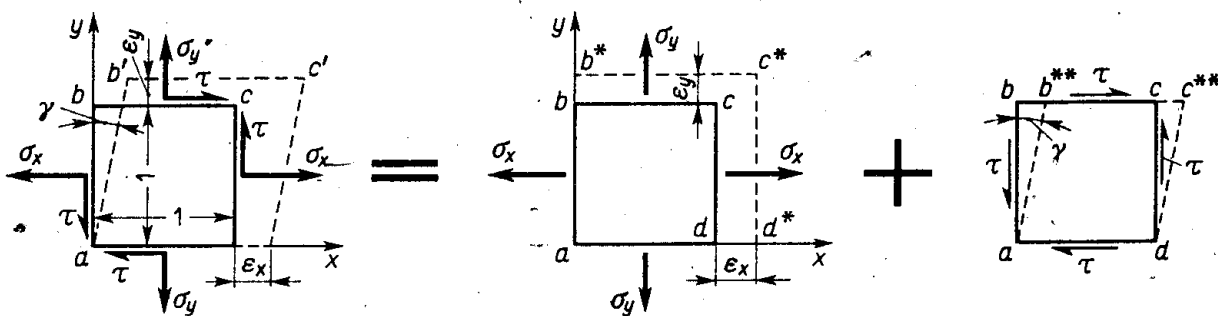
oraz $e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$. Tak więc odkształcenie w stanie czystego ścinania jest czysto postaciowe, jak to omówiono w art. 3.1. Podobnie z układu kół Mohra dla odkształceń (rys. 7.19c) mamy w układzie osi x, y , że $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ oraz

$$\gamma = 2\varepsilon_1 = 2\tau(1+\nu)/E, \quad (c)$$

lub w formie wzoru (3.1)

$$\gamma = \tau/G,$$

co oznacza, że w stanie czystego ścinania ściana $abcd$ kostki zamienia się w równoległobok bez zmiany długości boków, a kąt dab ulega zmniejszeniu.



Rys. 7.20. Rozkład dowolnego stanu płaskiego na dwa prostsze

W przedstawionym powyżej ujęciu stan czystego ścinania przestaje być czymś wyjątkowym, a staje się jednym z wariantów płaskiego stanu naprężenia i odkształcenia ($\varepsilon_3 = 0$). Niemniej użycie tego stanu jako składnika umożliwi przejrzysty opis odkształceń kostki bez wyznaczania naprężeń głównych. Rozłóżmy mianowicie płaski stan naprężenia na dwa (rys. 7.20). W pierwszym z nich $\sigma_z = 0$ oraz σ_x, σ_y są naprężeniami głównymi, a odpowiadające im odkształcenia określone są z wzorów (7.18). W drugim z nich mamy tylko odkształcenie postaci. W rezultacie wypadkowe odkształcenia są

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}, \quad \gamma = \frac{\tau}{G}. \quad (7.20)$$

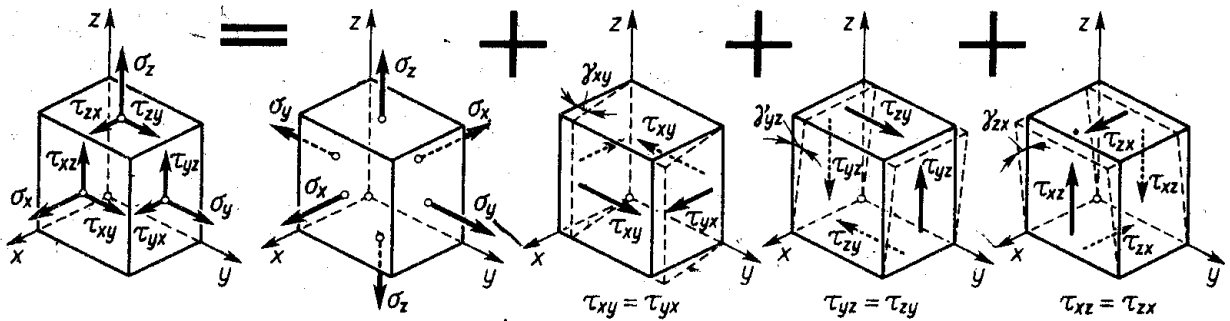
Podobnie określamy odkształcenia w trójwymiarowym stanie naprężenia jako superpozycję czterech stanów (rys. 7.21). W wyniku mamy

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]/E, \\ \varepsilon_y &= [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]/E, \\ \varepsilon_z &= [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]/E \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

oraz trzy odkształcenia postaciowe określone kątami

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G, \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G, \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx}/G. \quad (7.22)$$

Efektom tych odkształceń postaciowych jest zamiana kostki na równoległościan. Nakładające się na to działania σ_x , σ_y i σ_z powoduje zmianę długości jego krawędzi.



Rys. 7.21. Rozkład dowolnego trójwymiarowego stanu na cztery prostsze

Pokazany sposób opisu odkształceń jest celowy, gdy objektem badania jest całe ciało. Wtedy bowiem elementarne kostki są jednakowo zorientowane w stosunku do stałego układu osi x , y , z , a ich ściany nie są z reguły przekrojami głównymi. Widzieliśmy to w poprzednich rozdziałach, gdzie jako oś x obierano oś pręta, a osie y i z wiązano w pewien wyróżniony sposób z przekrojem poprzecznym.